Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

PARTE 2: LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Tema 6: Lenguajes de Primer Orden

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción a la lógica.

❑ Asignatura

Parte 1
Lógica Proposicional

Parte 2
Lógica de Primer Orden

Parte 3
Demostración Automática

Parte 4
Resolución

Introducción a la lógica.

❑ Componentes de la lógica de primer orden

Lenguaje de primer orden
Alfabeto
Sintaxis
Términos
Predicados
Sustituciones

+

Semántica
Interpretación
Dominio de interpretación
Funciones de interpretación
Fórmulas abiertas y cerradas
Satisfacción
Consecuencia lógica

↓

Razonamiento Semántico
Argumentos
Modelos
Contramodelos

Cáculo Deductivo
Teoría lógica
Sistema formal
Reglas de deducción natural
Reglas derivadas

↓

Metalógica
Validez
Completud
Decibilidad

↓

Conclusiones

Índice.

PARTE 2: Lógica de Primer Orden

6. **Lenguajes de Primer Orden.**
   - Introducción.
   - Alfabeto de la lógica de primer orden.
   - Sintaxis.
     - Términos.
     - Fórmulas.
     - Sustituciones.
   - Uso en la formalización de conocimiento.

Introducción.

¿Qué es la Lógica?

- La lógica constituye una técnica de representación del conocimiento.

- **Idea:** Buscamos la creación de sistemas que sean capaces de hacer razonamientos lógicos. Este tipo de sistemas se compone de:
  - Un conocimiento (BC: Base de Conocimiento)

    Hechos <- "Hoy es martes"

    Reglas <- "Si llueve no se puede jugar fuera", "Los martes llueve"
  - Un sistema de inferencia que es capaz de responder preguntas:

    "¿Se puede jugar fuera hoy?"

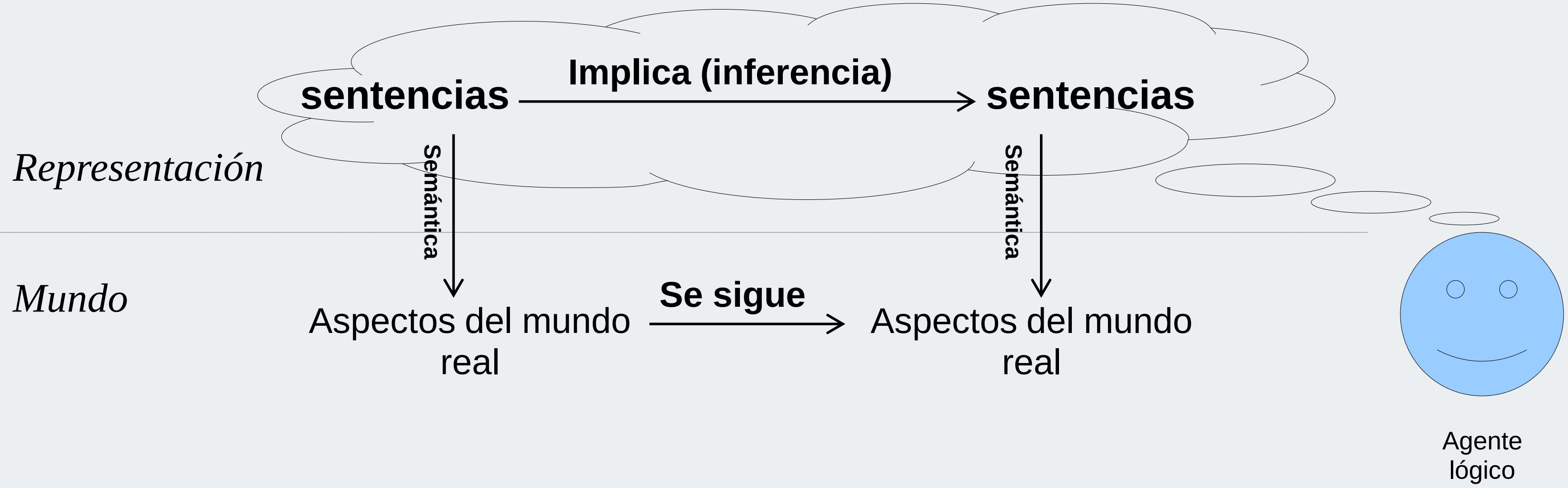
- Vemos dos: **Lógica de proposiciones** y **Lógica de predicados**.
  - Permiten representar formalmente, pero de una forma clara, hechos del mundo real (adecuación representacional), así como de hacer inferencias lógicas (adecuación inferencial).

  - Las inferencias realizadas son deductivas, es decir, si lo que se sabe (base de conocimiento) es cierto, lo que se deduce, también.

Introducción.

❑ ¿Qué es la Lógica?

- Existe una descripción del mundo real en lenguaje natural.
- Existe una representación del mundo, mediante un lenguaje formal.
- La semántica aporta la noción de verdad.
- Es posible aplicar dedución utilizando cálculo de deducción a las fórmulas.



Introducción.

❑ ¿Lógica de proposiciones y lógica de predicados?

Lógica proposicional:

- Estudio de la consecuencia. Razonamientos válidos y correctos.
- Estudio de los conjuntos de creencias consistentes.
- Sintaxis + Semántica.
- Inferencia.

Lógica de predicados. A lo anterior añade un aumento de la capacidad expresiva:

- Se analizan los enunciados atómicos.
- Aparecen los cuantificadores.

Introducción.

❑ La Lógica de Primer Orden

- La lógica proposicional sólo puede representar hechos acerca del mundo:
  - Solo se consideran frases declarativas, verdaderas o falsas y sin ningún otro valor de verdad.
  - La asignación de valores de verdad se realiza sin consideraciones de contexto ni de la estructura interna de los enunciados simples.
- Ejemplo: *Todo natural es entero y 2 es natural, luego 2 es entero*.

  $p \wedge q \mid\!- r$ es un razonamiento válido, pero la validez del razonamiento depende de la estructura interna de las proposiciones.
- La lógica de primer orden proporciona **más expresividad al captar más detalles del lenguaje natural**:
  - Considerar una estructura interna en los enunciados atómicos. Se puede acceder a los elementos de la proposición.
  - Considerar propiedades.

Introducción.

❑ Sistema formal de la lógica de primer orden

- Es un sistema lógico para inferir conclusiones a partir de premisas.
- Trabaja con problemas de razonamiento desde el punto de vista de la estructura.

Lenguaje formal: alfabeto + reglas para formación de fórmulas lógicas

Teoría semántica: relación entre el lenguaje y el conjunto de significados de una fórmula lógica (V o F).

Sistemas de deducción: métodos deductivos para determinar la validez de los razonamientos. Permiten obtener conclusiones utilizando reglas de inferencia.

Objetivo: Más interés en *Cómo* se razona, y menos en *Qué* se razona.

Alfabeto de la lógica de primer orden.

La Lógica de Primer Orden

- La lógica de primer orden describe un mundo que consta de:
  - objetos (términos)
  - propiedades (o predicados) de esos objetos.

- Entre los objetos, se verifican varias relaciones p.ej.

  Progenitor(Marcos, José).

- Una función es una relación en la cual sólo hay un valor para un input dado.

- Ejemplos

  Objetos: gente, casas, números, planetas,...
  Relaciones: progenitor, hermano-de, mayor-que,...
  Propiedades: rojo, pequeño, primo,...
  Funciones: padre-de, uno-más-que

Alfabeto de la lógica de primer orden.

❑ La Lógica de Primer Orden

- La lógica de primer orden contiene a la proposicional, pero es más potente. Utiliza una clase de lenguajes que son conocidos como lenguajes de primer orden, introducidos por Frege en 1879. El alfabeto de estos lenguajes dispone de símbolos que permiten:

  - Representar elementos arbitrarios del dominio o universo del discurso, por medio de **símbolos de variable**.
  - Representar elementos específicos del universo del discurso, por medio de **símbolos de constante**.
  - Representar generadores de elementos del universo del discurso a partir de uno o varios elementos de dicho universo, por medio de **símbolos de función**.
  - Expresar que nos referimos a algunos o a todos los elementos del universo del discurso, por medio de **símbolos de cuantificación o cuantificadores**.
  - Expresar propiedades o relaciones entre los elementos del universo del discurso, por medio de **símbolos de predicado**.

  - **Se añaden a la lógica proposicional los argumentos de los predicados y todo lo que deriva de ello: variables, constantes, funciones, cuantificadores.**

Alfabeto de la lógica de primer orden.

❑ Alfabeto

- El alfabeto de un lenguaje de primer orden consta de los siguientes símbolos:
  - las **conectivas** de la lógica proposicional $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ y $\leftrightarrow$.
  - los **símbolos de cuantificación** $\forall$ (universal) y $\exists$ (existencial).
  - los **símbolos de puntuación** "*(*" y "*)*". No son necesarios si se utiliza notación prefija.
  - un conjunto infinito numerable, $V = \{x, y, z, v, \ldots, x_1, y_1, z_1, v_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, v_n, \ldots\}$, de **símbolos de variables**.

  - un conjunto numerable (posiblemente vacío), C, de **símbolos de constante**: $a, b, c, \ldots$
  - un conjunto numerable (posiblemente vacío), F, de **símbolos de función** y una función r_1 que asigna a cada símbolo de función un elemento de N^* llamado su aridad (que representa el número de argumentos).
    - $f(\_), g(\_,\_), \ldots$ (aridad = n. de args: $f/1$, $g/2$)
  - un conjunto numerable y no vacío, P, de **símbolos de predicado** y una función r_2 que asigna a cada símbolo de predicado un elemento de N^* llamado su aridad (que representa el número de argumentos).
    - Las proposiciones son predicados sin argumentos.
- La elección de los conjuntos C, F y P proporciona un lenguaje específico de primer orden y viene determinada por la aplicación que se pretende.
- Supondremos que los conjuntos V, C, F y P son disjuntos dos a dos.

Sintaxis.

❑ Sintaxis

- Un vocabulario, *W*, es una cuádrupla <*C, F, P, d*> donde
  - *C*: conjunto finito de símbolos de constantes
  - *F*: conjunto finito de símbolos de función
  - *P*: conjunto finito de símbolos de predicado
  - *d*: función grado o aridad; d: F ∪ P ---> {1, 2, 3 , ...}

con la restricción de que *C, F y P* son disjuntos dos a dos.
Supondremos, además, que no contienen símbolos de variable, conectores, cuantificadores, ni símbolos auxiliares.

- Partiendo de un alfabeto el conjunto de **expresiones de un LPO** está formado por cualquier **concatenación (finita) de símbolos de su alfabeto**.

Sintaxis.

Sintaxis

- **Términos.** Son expresiones. Se denominan términos de un vocabulario *W* a:
  - **Constantes**. Una constante es un término. Representan un objeto concreto, siempre el mismo.

    Ej: *Juan, Mi_casa, a, b, 0, 1*
  - **Variables**. Una variable es un término. Representan objetos sin identificar. Referencia a un objeto concreto, según el contexto.

    Ej: *x, y, padre, hijo*
  - **Funciones**. Representan (implícitamente) un objeto concreto que está relacionado con n objetos que participan en la función. Referencia a un objeto concreto, de forma indirecta. Cada símbolo de función tiene asociado un entero (>1) denominado grado o aridad, que indica cuantos argumentos tomará el símbolo de función.
    - si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función con aridad $n \geq 1$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término

      Ej: *Hijo_de(Juan, Ana), Coseno(45)*

Sintaxis.

❑ Fórmulas

- Los **predicados** representan una propiedad de un término o relaciones entre varios términos, y se aplican sobre los términos para formar las fórmulas atómicas.
- Las **fórmulas atómicas** son expresiones de la forma $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, siendo P un símbolo de predicado de grado n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ términos.
- Las fórmulas atómicas expresan relaciones entre los objetos que denotan sus términos:
  - JEFE(Pedro, Luis) Pedro es el jefe de Luis
  - RESPETA(Luis, madre(Luis)) Luis respeta a su madre

- Las **fórmulas bien formadas** (FBF's) se definen inductivamente por:
  - 1. Una formula Atómica es una FBF.
  - 2. Si α es una FBF, $(\neg\alpha)$ es una FBF.
  - 3. Si α y β son FBF's $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ son FBF's .
  - 4. Si α es una FBF, $(\forall x\alpha)$ y $(\exists x\alpha)$ son FBF
  - 5. El conjunto de FBF's es el cierre transitivo del conjunto de fórmulas atómicas con las leyes 1), 2), 3) y 4)

Sintaxis.

❑ Literales y Precedencia

- **Literal**. Un literal es un átomo o la negación de un átomo.

  Ej: p, $\neg p$, $q(a, f(1))$, $\neg q(a, f(1))$, $cat(g(x, y))$, $\neg cat(g(x, y))$

- **Precedencia**. Se usan las reglas de la lógica proposicional, pero hay que ocuparse de los cuantificadores.
  - Igual que la negación, los cuantificadores tiene mayor precedencia que las otras conectivas
    - $\exists xF \wedge G$ es lo mismo que $(\exists xF) \wedge G$
    - significa que la segunda x en $\exists xp(x) \wedge q(x)$ no está cuantificada como la primera

❑ Cuantificadores y alcance.

- Sea la FBF $Qx\alpha$, con Q uno de $\forall$ o $\exists$. Se denominan:
  - cuantificador (sobre x): Qx
  - alcance del cuantificador: α
- Cuantificador universal ("para todo"): $\forall$
  $\forall x$ es verdad para cualquier valor de x
- Cuantificador existencial ("existe"): $\exists$
  $\exists x\ A$ existe al menos un objeto del dominio para el cual A es cierto
- Las **apariciones de variables** que están bajo el alcance de un cuantificador se dice que están **ligadas**, sino, se dice que están **libres**.

• Ejemplos de alcance del cuantificador.

$\forall x\ P(x) \rightarrow \forall y\ R(x, y)$

$\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x, y)$

$\forall x\ \forall y\ (P(x) \rightarrow R(x, y))$

Fórmulas

- <u>Ejemplo 1 de creación LPO</u>.

Juan y Pedro son amigos, aunque sólo Juan está casado.

- La oración incluye dos individuos concretos, por lo que son necesarias dos constantes: a, b para representarlos en el lenguaje formal.
- La oración afirma una relación de amistad entre ambos: por tanto es necesario un predicado con dos argumentos : $A(x,y)$.
- La oración afirma una propiedad de Juan: estar casado: $C(x)$

Por tanto, el lenguaje formal necesario para formalizar la oración tiene como alfabeto:

$$\{ a, b, A(x,y), C(x) \}$$

Y la fórmula de ese lenguaje que recoge lo dicho en la oración es:

$$A(a,b) \land C(a) \land \neg C(b)$$

Sintaxis.

❑ Fórmulas

- Ejemplo 2 de creación LPO.

Eva y María son amigas aunque sus maridos sean enemigos desde que el marido de Eva despidiese al de María.

- La oración habla de cuatro individuos. Dos de ellos son identificados por sus nombres propios y los otros dos se identifican *en función de* los anteriores. Por tanto, son necesarias *dos constantes: a, b* y una función *f() para representar "ser el marido de"*.
- La oración menciona una relación de amistad entre individuos: es necesario un predicado con dos argumentos : $A(x,y)$
- La oración menciona una relación en la que un individuo (x) despide a otro (y): $D(x,y)$

Por tanto, el lenguaje formal necesario para formalizar la oración tiene como alfabeto:

$$\{ a, b, f(x), A(x,y), D(x,y) \}$$

Y la fórmula de ese lenguaje que recoge lo dicho en la oración es:

$$A(a,b) \wedge \neg A(f(a), f(b)) \wedge D(f(a), f(b))$$

❑ Esquemas de formalización

<u>Ejemplo 1</u>: Universo de discurso: personajes de la novela de Chrétien de Troyes

a := Arturo
i := Ginebra
e := Lanzarote

$A(x,y)$:= x es amigo de y
$Q(x,y)$:= x ama a y
$O(x,y)$:= x odiar a y

Lanzarote ama a la reina Ginebra, pero ella no ama a todos los que la aman.

$$Q(e,i) \wedge \neg\forall x\, (Q(x,i) \rightarrow Q(i,x))$$

Lanzarote no ama a ninguno de sus amigos.

$$\forall x\, (A(x,e) \rightarrow \neg Q(e,x))$$

Los amigos de Lanzarote odian a aquellos a quienes Arturo ama.

$$\forall x\, (A(x,e) \rightarrow \forall y\, (Q(a,y) \rightarrow O(x,y)))$$

<u>Ejemplo 2:</u>

Todos los hombres son mortales

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$$

Los hombres son mamíferos bípedos

$$\forall x(H(x) \rightarrow (M(x) \wedge B(x)))$$

Todos los satélites de Júpiter son rocosos

$$\forall x(S(x,a) \rightarrow R(x))$$

Esquemas de formalización

Ejemplo 3: Universo de discurso: Todo (Seres humanos y tiempo están incluidos)

a := Calisto
e := Melibea
i := Segismundo

P(x) : *x* es una persona
T(x) : *x* es un instante de tiempo
A(x,y,z) : *x* ama a *y* en el instante *z*

Lo que hacemos es tomar un universo de discurso que incluye el tiempo.

Alguna vez amó Calisto a Melibea

$$\exists x(T(x) \land A(a,e,x))$$

El amor de Melibea por Calisto fue siempre correspondido

$$\forall x\, (T(x) \rightarrow (A(e,a,x) \rightarrow A(a,e,x)))$$

Melibea no amaba a Calisto en el mismo instante en que Calisto amaba a Melibea

$$\exists x(T(x) \land \neg A(e,a,x) \land A(a,e,x))$$

Sintaxis.

❑ Ejercicios

Ejercicio 1: Seleccionar las constantes, funciones y predicados necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:

1. Mi casa es roja $R(a)$
2. Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano $P(a) \wedge P(b) \wedge \neg M(c)$
3. Jorge adora a Juan $A(a,b)$
4. Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde $A(a,b) \wedge \neg A(b,a)$
5. Pedro sujetó a Juan y María le atizó $\mathrm{S}(a,b) \neg A(c,b)$
6. Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan $P(a,a) \neg P(a,b)$
7. Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia $D(a,b) \rightarrow L(c)$
8. El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto $A(a,b) \vee A(c,b) \wedge A(d,b)$

Sintaxis.

❑ Ejercicios

Ejercicio 2: Seleccionar las constantes, funciones y predicados necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:

1. Hay al menos un número primo $\exists x P(x)$
2. Algunas cantantes de ópera no están gordas $\exists x\, (C(x) \wedge \neg G(x))$
3. Cualquier crimen será castigado $\forall x\, P(x)$
4. No todos los crímenes merecen la pena capital $\neg\, \forall x\, P(x)$
5. Hay profesores que no saben explicar $\exists x\, \neg\, P(x)$
6. Sólo los suecos entienden a Bergman $\forall x\, (\exists y\, E(y,x) \rightarrow S(x))$
7. Hay genios, pero no todos los informáticos lo son $\exists x\, G(x) \wedge \neg \forall x\, (I(x) \rightarrow G(x))$

Sintaxis.

- **Variables**. Dada una fbf *(Qx)A*, decimos que *x* es la variable del cuantificador y que *A* es el rango o alcance del cuantificador (o de la variable cuantificada). Es decir, el rango de un cuantificador es la fbf a la que se aplica.
- **Variables libres y ligadas**. En una fórmula de un LPO:
  - Una variable se encuentra ligada en una fórmula cuando esta bajo el alcance de un cuantificador ($\forall x$ o $\exists x$).
  - Una variable se encuentra libre en una fórmula cuando no se encuentra ligada.
  - Un mismo símbolo de variable puede estar libre y ligado en una misma fórmula.

Ejemplos:

- En $\exists x p(x)$ la ocurrencia de la variable *x* está ligada.
- En $\exists x p(x, y)$ la ocurrencia de la variable *x* está ligada mientras que la ocurrencia de la variable *y* está libre.
- En *p(x,y)* la ocurrencia de la variable *x* está libre y la ocurrencia de la variable *y* está libre.
- En $\forall x p(x,y) \wedge q(x)$ la primera ocurrencia de la variable *x* está ligada mientras que la segunda ocurrencia de la variable *x* está libre. La (única) ocurrencia de la variable *y* está libre.

Sintaxis.

- **Fórmulas abiertas y cerradas:**
  - Una **fórmula es abierta** cuando contiene al menos una variable libre.
  - Una **fórmula es cerrada** si todas sus variables están ligadas.

    Ejemplos:
    - $\forall x\ \forall y\ (P(x) \rightarrow R(x, y))$ FORMULA CERRADA
    - $\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x, y)$ FORMULA NO CERRADA (la variable y es libre)
  - El cierre de una fórmula es una fórmula cerrada.

- La clausura o cierre universal de una fórmula $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la sentencia

$$\forall x_1\ \forall x_2 \dots \forall x_n\ A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- La clausura o cierre existencial de una fórmula $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la sentencia

$$\exists x_1\ \exists x_2 \dots \exists x_n\ A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Ejemplo:

$$Cierre_{\forall}(p(x) \vee \exists y q(x, z, y)) = \forall x \forall z (p(x) \vee \exists y q(x, z, y))$$

Ejercicios

Ejercicio 3: Señalar las variables libres y ligadas en las siguientes fórmulas:

1. $\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists yQ(x,y))$
2. $\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(x,f(y))$
3. $\exists x\exists y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(a,y)$
4. $\exists x\exists y((P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y))$
5. $\forall x(x=y \rightarrow \exists zP(x,z))$
6. $\exists x\forall yP(x,f(x,y)) \rightarrow \exists yQ(x,y)$
7. $x = y + z \rightarrow x \leq y + z$
8. $\forall x(x + 0 = x)$

Sustituciones

- Trataremos las fórmulas como secuencias de símbolos.
- Se utilizan las sustituciones para:
  - definir la semántica del lenguaje ($\forall, \exists$)
  - En la segunda parte de la asignatura (instancias, unificación, resolución).
- **Sustitución de variables**. Es una operación sintáctica sobre fórmulas y términos que se aplica solamente sobre variables libres. Asocia variables con términos.
  - $A(x)$ inicia la aparición de al menos una ocurrencia libre de x en A.
  - Dada una fórmula A, la expresión $A\{x/t\}$ denota la fórmula obtenida al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable x en A por el término t (por el que es sustituible).
  - En general, $A\{x_1/t_1; : : : ; x_n/t_n\}$, donde las sustituciones son simultáneas.

Ejemplos:

Si A denota a la fórmula $p(x)$, entonces $A\{x/b\}$ denota a la fórmula $p(b)$.

Si A denota a $P(x,f(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y)$, entonces $A\{x/a\}$: $P(a,f(y)) \rightarrow \exists y Q(a,y)$.

Si $A(y)$: $\exists x((P(x,y) \lor Q(x,y)) \land R(x,y)$, entonces $A\{y/f(z)\}$: $\exists x((P(x, f(z)) \lor Q(x, f(z))) \land R(x,f(z))$

Sintaxis.

Sustituciones

- En general, una función f se puede escribir como un conjunto de "pares".
  - Ejemplo: $f(x) = 2x$

    $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), ...\}$

    $\{1/2, 2/4, 3/6, 4/8, ...\}$

- **Terminología:**
  - **ligadura**: un par x_i/t_i
  - **Dominio (α)** = $\{ x \mid \exists t(x/t \in \alpha) \}$
  - **Rango (α)** = $\{ y \mid \exists t(\exists x(x/t \in \alpha) \wedge y$ aparece en $t) \}$
  - $\boldsymbol{\lambda}$ = {} (sustitución vacía, no hace nada)

Sintaxis.

❑ Sustituciones

- Ejemplos:
  - $\alpha_1 = \{ x/f(a), y/x, z/h(b, y), w/a \}$
    Dominio $(\alpha_1) = \{x, y, z, w\}$
    Rango $(\alpha_1) = \{x, y\}$
  - $\alpha_2 = \{ x/a, y/a, z/h(b, c), w/f(d) \}$
    Dominio $(\alpha_2) = \{x, y, z, w\}$
    Rango $(\alpha_2) = \{\}$
  - $\alpha_3 = \{ x/y, z/w \}$
    Dominio $(\alpha_3) = \{x, z\}$
    Rango $(\alpha_3) = \{y, w\}$
  - $\lambda = \{\}$
    Dominio $(\lambda) = \{\}$
    Rango $(\lambda) = \{\}$

Composición de sustituciones

- Dadas $\alpha = \{x_1/t_1, .., x_n/t_n\}$ y $\beta = \{y_1/s_1, .., y_m/s_m\}$, la composición $\alpha\beta$ de estas sustituciones se define como el conjunto

$$\{ x_1/(t_1\beta), .., x_n/(t_n\beta), y_1/s_1, .., y_m/s_m \}$$

del que se eliminan los elementos tales que

$x_i \equiv t_i\beta$;

$y_j \in \{x_1, .., x_n\}$

- Ejemplos

$$\alpha = \{ x/3, y/f(x, 1) \} ; \beta = \{ x/4 \}$$

$$\alpha\beta = \{ x/3, y/f(4, 1) \}$$

$$\beta\alpha = \{ x/4, y/f(x, 1) \}$$

- Propiedades: Para F,

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

$\alpha\lambda = \lambda\alpha = \alpha$

$\alpha\beta \neq \beta\alpha$

$(F\alpha)\beta = F(\alpha\beta)$

❑ Sustituciones

- En general, si sustituyo una variable x por un término t en una fórmula, la afirmación que hacía la fórmula sobre x, ahora la hace sobre t, pero no siempre ocurre esto.

  Ejemplo: $\exists y\ x = 2*y$ dice "x es par".

  Sustituyendo x por y se cambia el significado:
  $\exists y\ y = 2*y$ dice "existe un número que es el doble de sí mismo."

  Sustituyendo x por $z + 1$, se dice de $z + 1$ lo mismo que se decía de x:
  $\exists y\ z + 1 = 2*y$ dice "$z + 1$ es par" (o sea, "z es impar")

  Sustituyendo x por $x + 1$, se dice de $x + 1$ lo mismo que se decía de x:
  $\exists y\ x + 1 = 2*y$ dice "$x + 1$ es par" (o sea, "x es impar")

- Una **variable x es sustituible por un término t** en una fórmula A si ninguna ocurrencia de alguna variable z que aparece libre en el término t queda ligada al hacer la sustitución.

  Ejemplos: $A \equiv (\exists z\ p(x,z) \wedge q(y))$
  Si $t \equiv f(z)$, entonces x NO es sustituible por t en A.
  Si $t \equiv f(y)$, entonces x ES sustituible por t en A.
  Si $t \equiv f(x)$, entonces x ES sustituible por t en A.

Sustituciones

- De otra manera:

Una sustitución a no se puede aplicar a una fórmula F si pasa lo siguiente:

- a contiene una ligadura x/t y t contiene la variable z
- hay una ocurrencia de x en F que se puede reemplazar por t según las reglas de la aplicación libre, pero dicha ocurrencia está dentro del ámbito de un cuantificador sobre z

Ejemplo:

$$\exists z q(x, z)\{x/f(z)\} = \exists z q(f(z), z)$$

no se puede hacer

Uso en la formalización de conocimiento.

- **Resumiendo**:
  - Sólo sustituiremos ocurrencias **libres** de las variables
  - Las ocurrencias de variables que aporte cada término sustituyente deben resultar libres en la fórmula final.

- **Cierre extraño**:
  - Ejemplo:

    $Cierre_{\exists}(\forall x p(x) \wedge q(x, y)) = \exists x \exists y(\forall x p(x) \wedge q(x, y))$

    ☞ hay dos cuantificadores sobre x cuyo ámbito se solapa

    Es algo que se tiene que evitar.

- **Situación imposible**:
  - Ejemplo:

    $\exists z q(x, z)\{x/f(z)\} = \exists z q(f(z), z)$ $\exists z' q(x, z')\{x/f(z)\}$

    Hay confusión entre variables que conceptualmente son distintas pero tienen el mismo nombre.
    La mejor solución es renombrar las ocurrencias ligadas de variables.

Sintaxis.

Ejemplos

Realizar las siguientes sustituciones:

1. $(\ \exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y))\ )\{y/g(z)\}$

   $\exists x(P(x,f(g(z))) \rightarrow \exists y Q(x,y))$

2. $(\ \forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))\ )\{y/a\}$

   $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x, y))$

3. $(\ \forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(x,y))\ )\{y/a\}$

   $\forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(x,a))$

4. $(\ \exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)\ )\{y/b\}$

   $\exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,b)) \wedge R(x,b))$

❑ Ejercicios

Ejercicio 4: Realizar las siguientes sustituciones:

1. $(\ \exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)\ )\{x/b\}$
2. $(\ \exists x \forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)\ )\{x/a,\ y/b\}$
3. $(\ \forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))\ )\{y/f(x,a)\}$
4. $(\forall y P(x,y) \rightarrow \forall x Q(x,y)\ )\{y/f(x,a)\}$
5. $(\ x = y + z \rightarrow x \leq y + z\ )\{x/1,\ y/2\}$
6. $(\ x = y + z \rightarrow x \leq y + z\ )\{x/s(x)\}$
7. $(\ x = y + z \rightarrow x \leq y + z\ )\{x/s(y)\}$
8. $(\ \forall x(\ x + 0 = x)\ )\{x/1\}$

Uso en la formalización de conocimiento.

- Ejemplos de formalización de argumentos:
  - Ejemplo 1:
    La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. Todo cuerpo que orbita en torno al Sol es un planeta. Son satélites los cuerpos que orbita en torno a planetas. Luego la Tierra es un planeta y la Luna un satélite.

    $\{ O(a,b), O(c,a), \forall x(O(x,b)\rightarrow P(x)), \forall x\forall y(O(x,y)\wedge P(y)\rightarrow S(x)) \} \vdash P(a)\wedge S(c)$

  - Ejemplo 2:
    Cero es un número natural. El sucesor de un número natural es también un número natural. La suma de cualquier número natural y cero es igual a ese mismo número. La suma de un número y el sucesor de otro es igual al sucesor de la suma del primero más el antecesor del segundo.

    $N(a), \forall x(N(x)\rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x)\rightarrow x+a= x), \forall x\forall yN(x)\wedge N(y) \rightarrow x+s(y) = s(x+a(y)))$

Uso en la formalización de conocimiento.

- Ejemplo 2. Definir LPOs en los que formalizar los siguientes argumentos:

Aquel que no existe no puede engañarse. Yo me engaño. Luego yo existo.

$$\{ \forall x(\neg E(x) \rightarrow \neg P(x)), P(a) \} \vdash E(a)$$

Solamente las personas bien educadas están suscritas al Times. Ningún puercoespín sabe leer. Las personas bien educadas saben leer. Luego ningún puercoespín está suscrito al Times.

$$\{ \forall x(T(x) \rightarrow B(x)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg L(x)), \forall x(B(x) \rightarrow L(x)) \} \vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg T(x))$$

Todos los filósofos se han preguntado qué es la Filosofía. Todos los que se han preguntado qué es la Filosofía han dado en la locura. Nietzsche es un filósofo. El Padre Ceballos no acabó loco. Luego Nietzsche y el Padre Ceballos no son la misma persona.

$$\{ \forall x(F(x) \rightarrow P(x)), \forall x(P(x) \rightarrow L(x)), F(a), \neg L(b) \} \vdash \neg(a = b)$$

Ejercicios

Ejercicio 5: Definir los LPOs que formalizan los siguientes argumentos:

1. Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente.
2. Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.
3. No todos los seres humanos saben hablar o son inteligentes. Sara es un ser humano pero no sabe hablar. En consecuencia, Sara es inteligente.
4. Todos los chimpancés saben hablar. Algunos primates no saben hablar. Algunos primates son humanos. Por tanto, algunos seres humanos son chimpancés y saben hablar.
5. Todos los chimpancés son primates. Algunos seres humanos son inteligentes. Algunos primates son seres humanos. Juan es un chimpancé y Sara es un ser humano que sabe hablar. Así pues, Juan es un primate y Sara es inteligente.
6. Todos los rinocerontes tienen un cuerno. Todos y sólo los rinocerontes son dignos de ser cazados. Luego todos los animales dignos de ser cazados tienen un cuerno.
7. Todas las selvas tropicales tienen color verde. Nada que tenga color verde esta seco. Por tanto, ninguna selva tropical esta seca.